I) SÉRIES À TERMES POSITIFS.

1. Étudier la nature des SATP de terme général u_n suivantes ($a > 0$) :
   (a) $\dfrac{1}{a^{\alpha n}}$
   (b) $\dfrac{a^n}{n!}$
   (c) $\dfrac{n!}{n^n}$
   (d) $\dfrac{1! + 2! + ... + n!}{(n+p)!}$, p entier naturel.
   (e) $\dfrac{2^n (\sin\alpha)^{2n}}{n^2}$, $\alpha \in [0, \pi[$.
   (f) $\dfrac{1}{a^{\ln n}}$
   (g) $\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$
   (h) $\dfrac{1}{a^{n^\alpha}}$
   (i) $\dfrac{(na)^n}{n!}$
   (j) $\dfrac{\log_n a}{\log_a n} (a \neq 1)$
   (k) $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
   (l) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$
2. : Constante d'Euler.
   (a) Etudier la nature de la *suite* $(u_n) = (h_n - \ln n)$ en étudiant la nature de la *série* $\Sigma (u_n - u_{n-1})$ ($h_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$).
   (b) * Etudier la nature de $\Sigma \dfrac{1}{a^{h_n}}$, $a > 0$.
3. : Calculs de sommes.
   Justifier la convergence et calculer les sommes suivantes :
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ (décomposer en éléments simples de deuxième espèce).
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 - 1}{n^4 + n^2 + 1}$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$.
   REP : 1/2,1/2, 2.
4. * : Troisième démonstration de la nature des séries de Riemann.
   (a) Démontrer que $\Sigma \dfrac{1}{n}$ DV en utilisant $\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1} \geqslant \dfrac{3}{k}$
   (b) Démontrer que $\Sigma \dfrac{1}{n^\alpha}$ CV pour $\alpha > 1$ en utilisant $\dfrac{1}{k^\alpha} + \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{2}{k^\alpha}$

5. Série des max, des min dans le cas positif.
   Soient Σa_n et Σb_n deux SATP.
   (a) Si ces deux séries sont convergentes, que dire de $\Sigma \max(a_n, b_n)$?
   (b) Si ces deux séries sont divergentes, que dire de $\Sigma \min(a_n, b_n)$?
6. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.
   (a) Montrer que $\Sigma \dfrac{1}{(\sigma(n))^2}$ CV.
   (b) Montrer que $\Sigma \dfrac{1}{\sigma(n)}$ DV.
7. :
   (a) On suppose que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Démontrer que Σu_n CV ssi $a = b = 0$.
   (b) Déterminer les polynômes réels P tels que la série de t.g. $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ est convergente.
   Indication :
   Montrer que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, et qu'alors $u_n = -\dfrac{a}{3} + \left(\dfrac{-b}{3} + \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{3}{4}\right)\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
8. En comparant avec une intégrale, déterminer la partie entière de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.
   REP : 198.
9. * : Démonstration de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (a) Soit $\theta \neq 0\ [\pi]$; écrire cle développement de $\sin((2n+1)\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cot\theta$.
   (b) En déduire un polynôme P_n de degré n dont les racines sont les $\cot^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.
   (c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.
   (d) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en utilisant que si $\alpha \in]0, \pi/2[$, $\cot^2 \alpha < \dfrac{1}{\alpha^2} < \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.
10. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donner les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
11. : A-t-on : (1) Σu_n CV $\Leftrightarrow$ (2) $u_n << \dfrac{1}{n}$??
   (a) Montrer que si (u_n) est décroissante positive (1) $\Longrightarrow$ (2) est vrai.
   Méthode 1 : minorer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$
   Méthode 2 : calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$; justifier que (S_n) possède une limite ; montrer que cette limite est forcément finie, et conclure.
   (b) Montrer que (1)$\Rightarrow$ (2) est faux, même pour des SATP
   REP : $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, et $u_n = 0$ sinon, ou si on veut $u_n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, et $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ sinon.

(c) Montrer que (2)$\Rightarrow$ (1) est faux, même pour des SATP (penser aux séries de Bertrand).

12. * : Formule de Stirling.

(a) En comparant avec une intégrale, donner un équivalent simple de $\ln n!$ $(=\sum_{k=1}^{n} \ln k$!). L'exponentielle de cet équivalent est-il un équivalent de $n!$?

(b) Montrer que la comparaison avec une intégrale permet de montrer que $\ln n! = n \ln n - n + o(n)$.

(c) On conjecture que $\ln n! = n \ln n - n + a \ln n + b + o(1)$.
Posons $u_n = \ln n! - n \ln n + n - a \ln n$, cherchons un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que $a = 1/2$. Montrer que pour $a = 1/2$, la conjecture est exacte.

(d) En déduire que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^b$, et que $\frac{(2n)!}{n!} \sim \sqrt{2}\left(\frac{4n}{e}\right)^n$.

(e) Sachant que $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ (résultat obtenu par les intégrales de Wallis), démontrer que $e^b = \sqrt{2\pi}$ et en déduire la formule de Stirling.

13. * : Amélioration du critère de D'Alembert : le critère de Duhamel.
Soient Σu_n et Σv_n deux séries à termes strictement positifs.

(a) Montrer que si APCR, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la convergence de Σv_n entraîne celle de Σu_n et que la divergence de Σu_n entraîne celle de Σv_n.

(b) Soit $v_n = \frac{1}{n^\beta}$; montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(c) Soit Σu_n une SATP ; on suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (on est donc dans le cas douteux de D'Alembert).
Montrer que si $\alpha > 1$, alors Σu_n CV et que si $\alpha < 1$, alors Σu_n DV.

(d) Appliquer ce critère à $u_n = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4....2n}$, puis $u_n = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4....(2n+2)}$.

14. * : Suite de 13, autre critère dans le cas douteux de d'Alembert.

(a) Soit Σu_n une SATP ; on suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n > 0, \lim \varepsilon_n = 0$.
Montrer que si $\varepsilon_n >> \frac{1}{n}$, alors Σu_n CV et que si $\varepsilon_n << \frac{1}{n}$, alors Σu_n DV (retenir qu'il y a convergence si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tend pas "trop vite" vers 1, moins vite que $\frac{1}{n}$ ne tend vers 0).

(b) Appliquer à $\Sigma \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 1$.

15. * : Critère fin de Duhamel.

(a) Soit Σu_n une SATP ; on suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $u_n \sim \frac{a}{n^\alpha}$.
Indications : Poser $v_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$ et étudier la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$.

(b) En déduire que Σu_n CV ssi $\alpha > 1$.

16. : Sur les produits infinis.

(a) Vérifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$.

(b) Soit (u_n) une suite à termes $\geqslant 0$; on pose $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$,$p_n = (1 + u_0)(1 + u_1)...(1 + u_n)$; vérifier que $s_n \leqslant p_n \leqslant e^{s_n}$

(c) En déduire que (p_n) CV ssi Σu_n CV.

(d) Calculer $\lim p_n$ pour $u_n = \frac{1}{2^{2^n}}$.

17. * : Sur la série $\Sigma \dfrac{u_n}{S_n}$.

    Soit Σu_n une série à termes strictement positifs, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

    (a) Montrer que si Σu_n CV alors $\Sigma \dfrac{u_n}{S_n}$ aussi.

    (b) Donner un exemple où $\Sigma \dfrac{u_n}{S_n}$ est grossièrement divergente.

    (c) Montrer que si (u_n) est majorée et Σu_n DV alors $\Sigma \dfrac{u_n}{S_n}$ DV ; indication : $\ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right) \sim -\dfrac{u_n}{S_n}$.

    (d) Appliquer ceci pour pour montrer que $\Sigma \dfrac{1}{n \ln n}$DV.

    (e) Montrer que si Σu_n DV alors $\Sigma \dfrac{u_n}{(S_n)^2}$ CV ; indication : $\dfrac{u_n}{S_n^2} \leqslant \dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}$

    (f) Appliquer ceci pour montrer que $\Sigma \dfrac{1}{n (\ln n)^2}$ CV.

18. * : Critère de la loupe, ou critère de condensation.

    (a) Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroisante positive ; on pose $v_n = 2^n u_{2^n}$: montrer que Σu_n CV $\Leftrightarrow$ Σv_n CV et que dans le cas convergent,

    $$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

    (b) Appliquer ceci pour une quatrième démonstration de la nature des séries de Riemann.

19. * : Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que $\Sigma n^2 u_n^2$ converge. La série Σu_n est-elle forcément convergente ? (Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

    II) SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

20. :

    (a) Donner un exemple où $\Sigma (u_n + u_{n+1})$ CV mais Σu_n DV.

    (b) Montrer que Σu_n CV $\Leftrightarrow$ $\Sigma (u_n + u_{n+1})$ CV et .... (condition supplémentaire à trouver).

    (c) En déduire une nouvelle démonstration du théorème des séries alternées.

21. : Série des max.

    Soient Σa_n et Σb_n deux séries à termes réels. Si ces deux séries sont convergentes, que dire de $\Sigma \max(a_n, b_n)$?

22. : Fonctions génératrices des coefficients binomiaux.

    (a) La fonction horizontale $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$ est bien connue... (donner la réponse tout de même).

    (b) La fonction verticale est $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} x^k$.

       i. Vérifier que g_n est définie au moins sur $]-1, 1[$.

       ii. Trouver grâce à la relation de Pascal une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x)$.

       iii. En déduire que $g_n(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$

23. * : Est-il possible de trouver (u_n) et (v_n) telles qu'on ait simultanément :

    (a) $|u_n| << |v_n|$

    (b) Σv_n CV

(c) Σu_n DV

24. * : Est-il possible de trouver (u_n) telle que

    (a) Σu_n CV et Σu_n^2 DV

    (b) Σu_n CV et Σu_n^3 DV

    REP pour b) $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt[3]{n}}$; indication, déterminer un DL de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3n+1}} + \dfrac{j}{\sqrt[3]{3n+1}} + \dfrac{j^2}{\sqrt[3]{3n+2}}$.

25. * : La série des moyennes.
    Soit Σu_n une SATP convergente

    (a) On pose $v_n = \dfrac{u_1 + ... + u_n}{n}$; montrer que Σv_n est divergente, sauf si tous les u_n sont nuls.

    (b) On pose $w_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n}$, $x_n = \dfrac{w_n}{n+1}$

    i. Montrer que $\lim w_n = 0$.

    ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - w_{n+1}$; qu'en déduit-on ?

    (c) On pose $y_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 ... u_n}$; on rappelle que la moyenne géométrique est majorée par la moyenne arithmétique.

    i. Montrer que $y_n \leqslant \dfrac{w_n}{\sqrt[n]{n!}}$.

    ii. Montrer que $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leqslant e^n$.

    iii. En déduire que Σy_n est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.